Les intervalles de IR, cas de 3ème humanités secondaire (actuellement 1ère humanité)

YAMFU MVUDI Cyrille

(Reçu le 5 Janvier 2021, validé le 06 Janvier 2021)
(Received January 5th 2021, valided January 6th 2021)

Résumé

Cette étude constitue une nouvelle structure sur l'enseignement de notion des intervalles afin de permettre aux élèves de mieux la comprendre. A travers cette étude, nous voulons bien signifier aux apprenants que cette dite notion ne s'arrête pas en 3ème année des humanités ou 1ère humanités toute section confondue mais elle s'applique aussi dans le calcul infinitésimal (limites, dérivées et intégrales) et dans d'autres domaines, l'agriculture par exemple.

Mots-clés : Intervalles, IR, mathématiques

Abstract

This study constitutes a new structure on the teaching of the notion of intervals in order to allow students to better understand it. Through this study, we want to make it clear to learners that this so-called notion does not stop in the 3rd year of the humanities or the 1st humanities, all sections combined, but it also applies in infinitesimal calculus (limits, derivatives and integrals) and in other areas, such as agriculture. Keywords: Intervals, IR, mathematics.

I. Introduction

Les intervalles de IR sont de notions très importantes dans la formation d'un apprenant ou un aspirant scientifique en mathématique. Notre expérience professionnelle nous a montré combien les notions traitées dans cette étude constituent un excellent point de départ pour la maitrise d'une large classe de concepts mathématiques en générale et surtout analytique.

Un élève qui, dès la troisième année des humanités, arrive à maitriser les intervalles de IR au niveau de la présente étude, possède un atout majeur pour la réussite de sa formation ultérieure en mathématique en générale et analyse en particulier.

Pourtant, malgré leur simplicité, les notions d'intervalles sont comprises d'une manière vague. C'est pour cette raison que nous leur avons consacré ces notions pour palier certaines difficultés aux intervalles.

La structure de l'étude comprend deux parties. Dans la première partie, nous aborderons les encadrements de IR, la deuxième partie, sera consacrée aux intervalles de IR proprement dits et une conclusion mettra fin à notre étude.

II. Encadrement de IR

2.1. Encadrement d'un nombre réel

2.1.1. Notion d'encadrement

Supposons que vous vouliez mesurer Ia longueur d'un segment à l'aide d'une règle graduée au millimètre. En général vous ne pouvez pas déterminer Ia valeur exacte de la longueur (L). Mais vous pouvez affirmer, par exemple, que Ia longueur (L) est comprise entre 125 mm et 126 mm.

Nous écrivons : 125 mm $\leq$ L $\leq$ 126mm et nous avons réalisé un encadrement de L à 1mm près (c'est-à-dire 126mm-126mm= 1 mm)

Définition

- Si Ie réel x (en général inconnu) est compris entre a et b (étant des réels), on pourra écrire :

$a \leq x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou encore $a < x \leq b$ ou bien $a < x < b$

- ❖ C'est un encadrement de x dont Ia longueur est b-a
- ❖ On dit que, c'est encadrement de x à (b-a) près.
- ❖ a est une valeur approchée de x par défaut à (b-a) près
- ❖ b est une valeur approchée de x par excès à (b-a) près
- ❖ Les symboles ci-dessous se lisent:

$\geq$ Supérieur ou égal
$\leq$ Inférieur ou égal
< Strictement inférieur à...

- ❖ $a \leq x \leq b$ peut se lire, a inférieur ou égal à x, x inférieur ou égal à b.

I.1.3. Exemple numérique

Soit x = 5,782.14…

En effet 5< x < 6 est un encadrement du nombre réel x par défaut à 1 près.

- ❖ 5 est la valeur approchée du réel x par défaut à 1 près
- ❖ 6 est la valeur approchée du réel x par excès à 1 près
- ❖ $5,7 \leq x \leq 5,8$ est un encadrement de x à 0,1 près
- ❖ 5,7 est la valeur approchée de x par défaut à 0,1 près
- ❖ 5,8 est la valeur de x par excès à 0,1 près

$$\left.\begin{array}{l} \text{D'où : } 5,78 \leq x \leq 5,79 \\ 5,782 \leq x \leq 5,783 \\ 5,7821 \leq x \leq 5,7822 \end{array}\right\} \text{C'est une valeur d'encadrement de x 0,01 à 0,0001 près}$$

- ❖ 5,78 est une valeur approchée du réel x par défaut à 0,01 près
- ❖ 5,79 est valeur approchée du réel x par excès à 0,01 près

2.2. Amplitude d'encadrement du réel x

2.2.1. Définition

Une amplitude appelée aussi distance d'encadrement $a \leq x \leq b$ de x est la différence de la valeur approchée de x par excès et la valeur approchée de x par défaut.

- ❖ D'où la formule : ∂= b-a avec $\partial \in$ IR

2.2.2. Exemples

(1) Soients deux (2) encadrements.
- ❖ $3,2 \leq x \leq 3,3$ et
- ❖ $-1 < x < 0$
- ❖ Déterminer l'amplitude de chaque encadrement

Réponse : si $3,2 \leq x \leq 3,3$ alors son amplitude est $3,3 – 3,2 = 0,1$

Si $-1 < x < 0$ alors son amplitude est $0-(-1) = +1$ ou 1

(2) Considérons le réel x = 5,78214… on a une suite d'encadrement du réel x consignés dans le tableau suivant.

Encadrement	v. app. de x par défaut	v. app. de x par excès	Amplitude de l'encadrement
$5 < x < 6$	5	6	1
$5,7 \leq x \leq 5,8$	5,7	5,8	0,1
$5,78 \leq x \leq ,79$	5,78	5,79	0,01
$5,782 \leq x \leq 5,783$	5,782	5,783	0,001
$5,7821 \leq x \leq 5,7822$	5,7821	5,7822	0,0001
…	…	…	…

Note : On peut définir des encadrements à $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$ près (ou 0,01 ; 0,001… près).

- ❖ Plus la longueur de l'encadrement est faible, meilleure est la précision avec laquelle vous connaissez x.

2.3. Encadrement d'une somme

Soient deux réels x et y tels que :

$A \leq x \leq b$ et á et b'

On peut écrire d'une part $x \leq b$
$Y \leq b'$ } Donc : $a + á \leq x + y$

Et d'autre part $x \leq b$
$Y \leq b'$ } Donc : $x + y \leq b + b'$

- En résumé : a + á ≤ x +y≤ b + b'

I.4. Encadrement du produit par un réel c non nul

Soit a ≤ x ≤ b
Si c> 0, nous avons : a ≤ x et c < 0 = ac ≥ xc
: x ≤ b et c <0 = xc ≥ bc

Donc, a ≤ x ≤ b
C < 0

$\Rightarrow ac \geq xc \geq bc$ Type equation here.

$\boxed{bc \leq xc \leq ac}$

I.5. Encadrement d'une différence

Soit a ≤ x ≤ b (1)

á≤ y ≤ b' (2)

- En multipliant les trois membres de la double inégalité (2) par (-1), on obtient :
  -b≤-y≤-á (3)
- En ajoutant membre en membre (1) + (3) on obtient $\boxed{a\text{-}b' \leq x\text{-}y \leq b\text{-}á}$

I.6. Encadrement de l'inverse d'un nombre

Préliminaire

Si a et b sont deux réels non nuls de même signe : a> b = $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

- En effet, a> b si a – b> 0
  Pour comparer : $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{a}$, on calcul leur différence : $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab}$ a et b étant de même signe.
  Ab est positif comme, a> b, a-b est positif et $\frac{a-b}{ab}$ est positif.
- Donc…$\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ est positif et $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ l'est aussi.
- Encadrement de$\frac{1}{x}$, soit a ≤ x < b

Si a et b sont strictement positif, x est strictement positif (étant compris entre deux nombres positifs)

- Si a et b sont strictement négatif, x est strictement négatif. Dans ces deux cas, a, b et x sont de même signe.
- On peut écrire : a ≤ x = $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ X< b = $\frac{1}{b} < \frac{1}{x}$

$$\boxed{\text{D'où : a} \leq \text{x b} = \frac{1}{b} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}}$$

<u>Remarque</u> : si a et b sont de signes contraires, on ne peut rien dire de x, qui peut être nul. Mais, ce cas a peu d'intérêt dans la pratique.

Exemples :

1) Si 6,3 < x ≤ 6,4 encadrer x à $\frac{1}{100}$ près.

Réponse : $\frac{1}{6{,}4} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{6{,}3} = 0{,}156\ldots < \frac{1}{x} \leq 0{,}158$ si on veut un encadrement à 0,01 près, on écrira : 0,15<0,156… <$\frac{1}{x} < -0{,}158 \ldots . < \frac{1}{x} < -0{,}158 < -0{,}16$

Donc 0,15<$\frac{1}{x}$<-0,16

2) Si -5,3<x<-5,2 encadrer $\frac{1}{x}$ à 0,002 près

Réponse : $\frac{1}{-5,2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{-5,3} \Leftrightarrow -0,192 \ldots < \frac{1}{x} <$ 0,188… : on écrira de même : -0,20<-192… <$\frac{1}{x} <$ $-0,188 < -0,18$

❖ Donc …0,20<$\frac{1}{x} < -0,18$

3) On donne 2,4≤ x < 2,5 (1) et -3,9≤ y<-3,8 (2)

a) Encadrement de x + y

On l'obtient en additionnant membre à membre les inégalités (1) et (2).

2,4 + (-3,9) ≤ x+y<2,5 + (-3,8)

$\boxed{-1,5 \leq x+y < -1,3}$

b) Encadrement de –y

Il faut, pour encadrer –y, multiplier les 3 membres de l'inégalité (2) par (-1) donc changer son sens, puisque (-1) est négatif.
-3,9≤-y>-3,8 (2)
+3,9≥-y>3,8 ou + 3,8<-y≤3,9 (3)
-3,9. (3) ≤ 3y<-3,8. (3)

$\boxed{-11,7 \leq 3y < -11,4}$

c) Encadrement de x-y

On l'obtient en additionnant membre à membre les inégalités (1) et (3).

On obtient : 2,4 + 3,8≤ x-y<2,5+3,9

$\boxed{6,2 \leq x-y < 6,4}$

d) Encadrement de -2x

Pour l'obtenir, on multiplie les trois membres de la 1ère inégalité par (-2). Il faut changer son sens, puisque (-2) est négatif.

2,4 (-2) ≥ -2x > 2,5. (-2)
-4,8 ≥ -2x > -5

$\boxed{-5 < -2x \leq -4,8}$

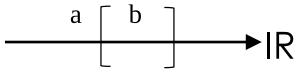
e) Encadrement de 3y

Il faut multiplier les trois membres de l'inégalité (2) par 3 ; le sens de l'inégalité est inchangé, puisque 3 est positif.

III. LES INTERVALLES DE IR

3.1. Définition

(1) Un intervalle est une partie ou un sous-ensemble de IR.
(2) Un intervalle est un segment de droite dont a est l'origine et b l'extrémité.



Notation : Soient a et b deux nombres réels. Un intervalle d'extrémité a et b est noté de deux manières différentes, en extension (on utilise les crochets) et en compréhension (on utilise les accolades avec encadrement).

Ainsi, .[a, b] ={x ∈ IR : a ≤ x ≤ b} Est l'ensemble des réels, x tels que a ≤ x ≤ b.]a, b[={ x ∈ IR : a < x < b} Est l'ensemble des réels, x tels que a< x < b

.[a, b[= {x ∈ IR : a ≤ x < b} Est l'ensemble des réels, x tels que a ≤ x < b.]a, b]={x ∈ IR : a < x ≤ b} Est l'ensemble des réels, x tels que a< x ≤ b

.]-∞, b]={x ∈ IR : a ≤ x < b} Est l'ensemble des réels, x tels que x ≤ b.

.]a, +∞,[={x ∈ IR : a ≤ x} Est l'ensemble des réels, x tels que a ≤ x.

3.2. Différence entre intervalle et encadrement

La différence entre un intervalle et un encadrement réside sur la NOTATION. D'où, un intervalle se note par deux crochets ([.]) tandis qu'un encadrement est noté par les accolades ({.}).

Nous nous convenons :

- 4 ≤ x < 6 est un encadrement
- [4,6[est un intervalle de cet encadrement.

3.3. Différents types d'intervalles

Soient a et b deux nombres réels tels que a ≤ b

1. [a, b]= {x ∈ IR : a ≤ x ≤ b} est un intervalle fermé d'origine a et d'extrémité b
2.]a, b[={x ∈ IR : a < x < b} est un intervalle ouvert d'origine a et d'extrémité b
3. [a, b[={x ∈ IR : a ≤ x < b} est un intervalle semi-ouvert à droite ou semi-fermé à gauche, d'origine a et d'extrémité b.
4.]a, b]={x ∈ IR : a < x ≤ b} est un intervalle semi-ouvert à gauche ou semi-fermé à droite d'origine a et d'extrémité b.
5.]a, + ∞[{x ∈ IR : a < x} est la demi-droite ouverte d'origine a.

On lit : l'intervalle ouvert a, plus l'infini est l'ensemble des réels x strictement supérieurs à a

6. [a, +∞[{x ∈ IR : a ≤ x} est la demi-droite fermée d'origine a.

On lit : l'intervalle fermé a, plus l'infini, est l'ensemble des réels x supérieurs ou égaux à a.

7.]- ∞,b]={x ∈ IR : x ≤ b} est la demi-droite fermée d'extrémité b

(**Lire** : l'intervalle moins l'infini, b fermé à droite est l'ensemble des réels x inférieurs ou égaux à b)

8.] - ∞, b[={x ∈ IR : x < b} est la demi-droite ouverte d'origine b

(**Lire** : l'intervalle moins l'infini, b ouverte à droite est l'ensemble des réels x strictement inférieurs à b.

9.]- ∞, +∞[= IR est la droite réelle ou la droite numérique. Elle est aussi un intervalle.

N'écrivez pas : $-\infty < x < +\infty$; $-\infty <$ x ≤ b; a $\leq$ x $< -\infty$

Exemples :

1)]-2,6 [={x ∈ IR : -2<x<6} est l'ensemble des réels compris entre (-2) et 6

On lit : intervalle-ouvert moins 2 ; 6.

2) [12, 21]={x □ IR : 12≤ x ≤ 21} est l′ensemble des réels x tels que

$$12 \leq x \leq 21$$

<u>On lit</u> : intervalle 12, 21, fermé à gauche et à droite

3) [4 ;7[est l'ensemble des réels analogues à celui désigné par x tels que $4 \leq x < 7$; égalité possible avec 4 à cause du crochet vers l'intérieur.

<u>On lit</u> : intervalle 4 ; 7 fermé à gauche, ouvert à droite

4) [-1, +∞[désigne l'ensemble des réels x tels que ≥-1

<u>On lit</u> : intervalle moins un, plus l'infini fermé à gauche, … x supérieur ou égal à -1. On écrit aussi -1≤ x. mais pas -1≤ x < + ∞

5)]- ∞, 3[désigne l'ensemble des réels x tels que x< 3

<u>On lit</u> : intervalle ouvert moins l'infini trois … x plus petit que 3. Mais on écrit pas -∞< x< 3

II.4. Remarques

a) Les symboles « -∞ » et « +∞» qui se lisent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini » ne sont pas de nombres réels. Ils indiquent que la droite réelle est illimitée dans les deux sens à partir de zéro.
b) si a=b, le segment [a,b]=[a,a]=[b,b]={a} appelé **<u>point</u>** ou **<u>singleton</u>**
c) si a=b,]a,b[=]a,a]=[a,a[=]a,a[=Ø
d) d.1.[0, +∞[= IR+ est l'ensemble des nombres réels positifs.
d.2.]- ∞,0]= IR- est l'ensemble des nombres réels négatifs
d.3.]0, +∞[= IR_+^* est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls (i.e. IR_+^*= $IR_+\backslash\{0\}$
d.4.]-∞, 0[= IR_-^* est l'ensemble des nombres réels négatifs non nuls (i.e.IR_-^*=$IR_-\backslash\{0\}$
d.5.]-∞, 0[u] 0, +∞[= IR*= IR\{0} est l'ensemble des nombres réels non nuls
e) d (]a,b])= d([a,b[)= d (]a,b[)= b-a est l'amplitude ou la longueur de l'intervalle.
f) $\overline{IR}$: IR u{-∞, +∞} est appelé droite achevée. Donc, $\overline{IR}$= [-∞, +∞].
g) Les nombres a et b sont les bornes de l'intervalle. Celle de gauche est toujours inférieure à celle de droite.

3.5. Densité de IR

Entre les deux réels 0 et 1, il existe une infinité des nombres réels notamment : 0,1 ; 0,2 ; 0,567… de même pour 0,1 et 0,2 etc…

En général, entre deux réels distincts, il existe une infinité de nombres réels :

∀a, b □ IR, a <*b*, ∃*r*□ *IR : a< r < b.*

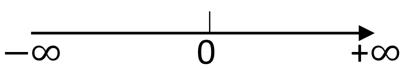
C'est pourquoi on dit que l'ensemble IR est dense.

Mais, dans IN, Z, D et Q : entre deux entiers a et b, aussi proche qu'ils soient, il n'existe pas d'entiers.

Par exemple, un entre deux entiers 2 et 3, il n'existe aucun entier dans IN.

3.6. Représentation de IR

Nos représentations l'ensemble IR des réels par une droite réelle appelée aussi droite numérique.



3.6.1. Principe de représentation

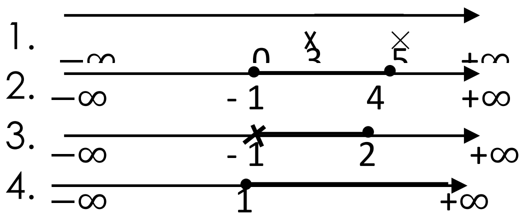
Dans ce travail, si une extrémité appartient à l'intervalle, on la représente par un **trait fort continu,** sur la droite réelle. Mais, s'il n'appartient pas à l'intervalle, on la représente par **un trait fin continu**.

3.6.2. Exemple

Représenter sur la droite réelle les intervalles suivants :

1)] 3, 5[, 2) [-1, 4], 3)]-1, 2] 4)[1, +∞[

Réponse :



Légende : x **<u>ouvert</u>** (si l'une de formes de l'intervalle est ouverte)

• **<u>Fermé</u>** (si l'une de formes de l'intervalle est fermée)

II.7. Opération sur les intervalles de IR

Toutes les opérations applicables dans IR sont aussi possibles pour les intervalles de IR entre-autre : l'intersection (n), la réunion (U), le complémentaire ©, la différence (\) et la différence symétrique (Δ).

3.7.1. Principe du travail

On représente sur la droite réelle les deux intervalles donnés. On déduit en fin la partie qui traduit l'opération définie.

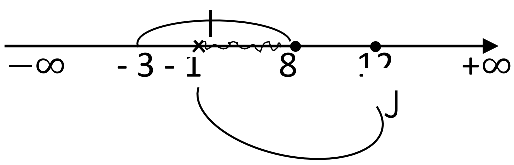
3.7.2. Applications

A. Soients les intervalles : I=[-3, 8], L=] -∞, 10], J=]-1,12], M=[5, +∞[K=[-$\frac{3}{2}$, 0[

B.

Déterminer :

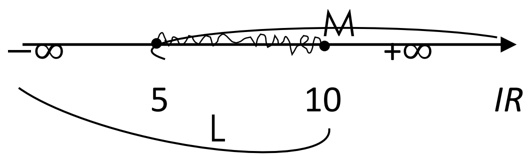
1I∩J = ?



D'où, I∩J=] -1,8]

- I∩J=$[-3, 12]$
- IΔJ=$(\mathrm{I} \cup \mathrm{J})/(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) = [-3, 12]\backslash] - 1{,}8] = [-3, -1] \cup]\, 8{,}12]$

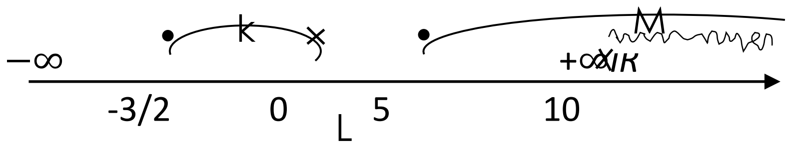
2) L **U** M = ?



D'où L **U** M=]- ∞, +∞[= IR

L ∩M=[5, 10]

3) $\begin{cases} L \\ IR \end{cases}$ =]10, +∞[$\begin{cases} L \\ IR \end{cases}$: Complémentaire)



4) IR\ K =] − ∞,$\frac{3}{2}$] ∪ [0, +∞[
5) K ∩ M = ∅ ou { }
6) K ∪ M = [−$\frac{3}{2}$, +∞[
7) M ∩ L = [5,10]
8) M ∪ L =] − ∞, +∞ [= IR
9) $\begin{cases} L \\ IR= \end{cases}$ IR \ L =]10, +∞[$\begin{cases} L \\ IR \end{cases}$: Complémentaire)
10) IR \ K =] − ∞,$\frac{3}{2}$[∪ [0, +∞[

C. Donner l'encadrement correspondant à chacun des intervalles suivants :

a. [12,25]
b. [−124, −36[
c.] − 7, +∞[
d. [3, +∞[
e.] − ∞, −2[
f.] − ∞, 108]
g.]-19,108[

Réponses
a. [12, 25] = {×∈ IR: 12 ≤ x ≤ 25}
b. −7, +∞[= {×∈ IR: 12 ≤ x ≤ 25}
c.]-7, +∞[= {×∈ IR: −7 < x}
d.]3, +∞[= {×∈ IR: 3 ≤ x}
e.] − ∞, −2[= {×∈ IR: x < −2}
f.] − ∞, 9] = {×∈ IR: x ≤ 9}
g.] − 19, 108[= {×∈ IR: −19 < x < 108}

D. Ecrire en extension les intervalles suivants :
1) [−3, −3]
2)]-4,4[
3) [−9, +9[
4)] − ∞, 2]

Réponses
1) [−3, −3] = {−3}
2)]-4,4[= {−3, −2, −1,0,1,2,3}
3) [−9, +9[= ϕ
4)] − ∞, 2] = {… − 2, −1,0,1,2}

E. Peut-on écrire IN et Z sous forme d'intervalles de IR ?
Réponse : Non, parce que IN et Z ne sont pas denses, c'est-à-dire entre 2 éléments de IN ou Z si proche qu'ils soient, il existe aucun élément.

F. Donner l'intervalle correspondant à chacun des encadrements suivants :
1) {x ∈ IR : −5 ≤ x ≤ 7}

2) $\{x \in IR : -8 < x \leq 0\}$
3) $\{x \in IR : x \leq 5\}$
4) $\{x \in IR : 5x - 3 < 7\}$

Réponses

1) $\{x \in IR : -5 \leq x \leq 7\} = [-5{,}7]$
2) $\{x \in IR : -8 < x < 0\} =]-81{,}0]$
3) $\{x \in IR : x \leq 5\} =]-\infty, 5]$
4) $\{x \in IR : 5x - 3 < 7\} \Rightarrow 5x - 3 < 7 \Rightarrow 5x < 7 + 3 \Rightarrow 5x < 10$
$\Rightarrow x < 2$

D'où $\{x \in IR : 5x - 3 < 7\} = \{x \in IR : x < 2\} =]-\infty, 2[$

G. Entre $]\,3, 5]$ et IR, lequel de ces intervalles a plus d'éléments que l'autre ? Pourquoi ?
En effet, aucun, parce que les deux sont des ensembles infinies.

I. CONCLUSION

Nous voici au terme de notre étude qui avait comme thème principal les intervalles de IR,cas de 3e année des humanités secondaire (actuellement 1ère humanité).

Généralement, les intervalles de IR sont de notions très capitales pour tous les adhérents en mathématique, cette étude constitue une nouvelle structure sur l'enseignement de ladite notion pour permettre aux élèves de mieux comprendre cette notion, combien elle est importante.

A travers cette étude, nous voudrions bien signifier aux apprenants que cette dite notion ne s'arrête pas en 3ème année des humanités ou 1ère humanités toute section confondue mais elle s'applique pas mal en analyse dans le calcul infinitésimal (limites, dérivées et intégrales) et d'autres domaines comme l'agriculture pour ne citer que ça.

Ainsi, nous pensons avoir contribué par cette structure de l'objet d'étude sur les intervalles de IR à la transmission aisée de cette notion par les enseignants à un esprit de simplicité honorable à nos élèves. Une notion combien importante dans leur formation. Une manière de faire qui va, certes, permettre à nos élèves à mieux assimiler cette notion même aux enseignants qui en prendront connaissance.

II. BIBLIOGRAPHIE

Kayembe, J.B.& Mbala Moke, G. (1998). *Maîtriser les maths 3e, 4e et 5e, . Kinshasa :* Edition Loyola

De Landeshere, G. (1976). Méthode. *Recherche à l'éducation*. Paris : 4e édition Armand colin.

NTATU IBULA, D. (2005). *Cours d'analyse mathématique I, 1ère graduat, math-info non puplié*. Kinshasa : UPN

Masinsa, B. (2005). *Difficultés créés à la notion d'intervalle dans les classes de 3e secondaire*

Mme Bernard, *Les mathématiques, conseils généraux séquences 1 à 5*, Mazot-Fascicules A et Á

Cyrille YAMFU, M. (2017). *Cours de maths pour TDR*,1er graduat, TD, ISDR, Kitenda.

YAMFU MVUDI Cyrille

Assistant 2 à l'ISDR KITENDA. Province de Kwilu.
République Démocratique du Congo